

Generative Topology Optimization: Exploring Diverse Solutions in Structural Design

Radler, A., Volkmann, E., Brandstetter, J., Berzins, A., 2025. Generative topology optimization: Exploring diverse solutions in structural design. *arXiv preprint*, arXiv:2502.13174.

M1 西尾舞紘

Abstract

研究背景と課題

- トポロジー最適化（TO）は、形式問題から準最適形状を導出する重要な手法。
- しかし、既存のTO手法は単一解の生成に限られ、設計空間内の代替解の探索が困難だった。

目的

- **複数の多様な準最適設計解**を効率的に生成可能な新しい最適化手法を提案すること。

提案手法：Generative Topology Optimization (GenTO)

- **データ不要**（data-free）なニューラルネットワークベース手法。
- **solver-in-the-loop**設定で学習を行い、各イテレーションで材料分布を最適化。
- 明示的な**多様性制約**（explicit diversity constraint）を導入し、解の多様性を保証。

検証と結果

- 2Dおよび3Dのトポロジー最適化問題に適用し、評価。
- **多様な設計解**を生成しながら、コンプライアンスを維持。
- 並列性（parallelism）により、従来手法に比べて1桁以上高速化を達成。

貢献

- 従来のトポロジー最適化の**柔軟性と適用範囲を大幅に拡張**。

新規性・信頼性・有用性

新規性

- データ不要
- solver-in-the-loopによるニューラルネットワーク学習を初めて提案し、トポロジー最適化に適用
- ニューラル密度フィールドに対し、Chamfer Discrepancyに基づく新しい多様性制約を導入し、異なる意味のある設計解を生成可能に。

信頼性

- 2Dおよび3Dの大規模な設計問題においても、効率的かつ柔軟に機能する。
- 並列計算を活用し、従来手法と比較して大幅な高速化と多様性向上を同時に実現。

有用性

- コンプライアンスや体積制約に基づく厳密な数値検証により、物理的妥当性を保証。
- 複数の問題設定と初期条件に対して一貫した性能を示し、手法の汎用性と安定性を実験的に検証。

1. Introduction

1.1 背景

背景

- TOは材料分布を最適化する計算設計技術
- 目標：**コンプライアンス最小化**（剛性最大化）

従来手法の限界

- 非凸性により**グローバル最適保証なし**
- 基本的に**単一解しか生成できない**
- 製造容易性・コスト・美的要求など**現実のトレードオフに対応しにくい**

目標

- **多様な高品質設計解の生成**
- **柔軟な設計選択肢の提供**

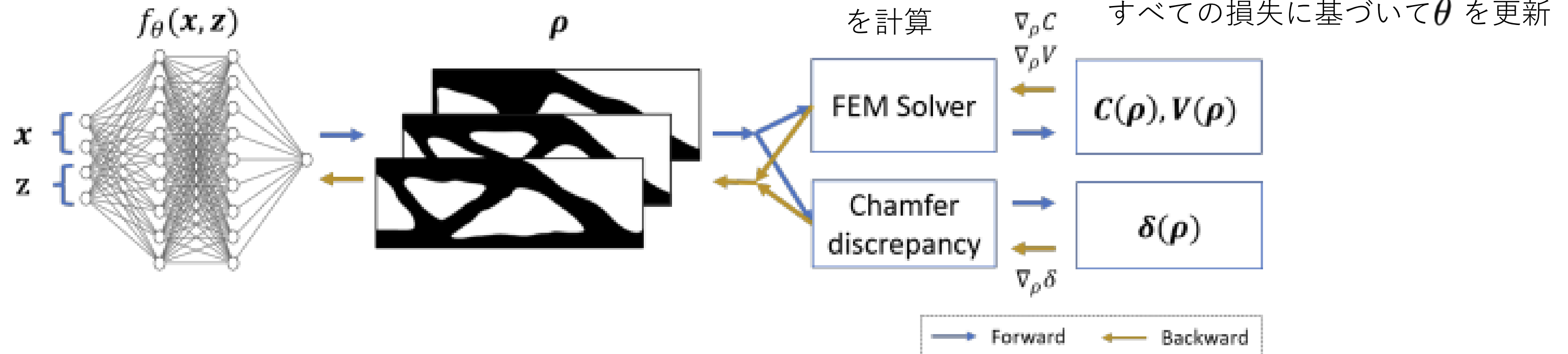
1.2 手法

手法 (GenTO)

- データ不要 (data-free)
- solver-in-the-loop最適化
- 明示的な多様性制約を導入
- 機械的性能 (コンプライアンス) を維持しつつ、幅広い設計解を生成

手法の流れ

入力：座標 x 、モジュレーション z NNで密度 $\rho(x, z)$ を出力



1.2 貢献

①GenTOの提案

- データ不要、solver-in-the-loopによるニューラルネットワーク学習手法を初めて導入。
- 構造要件を満たしつつ、多様な設計解を生成できることを示した。

②新たな多様性制約の提案

- ニューラル密度フィールドに対し、Chamfer距離に基づく新しい多様性制約を導入。
- 明確で意味のある異なる形状の生成を保証し、設計空間の探索を促進

③GenTOの有効性とスケーラビリティの実証

- 2Dおよび3Dのトポロジー最適化問題に適用し、様々な準最適設計解の生成能力を実証。
- 従来手法と比較して、速度・多様性の両面で大幅に優れた性能を確認した。

2. Background

2.1 Topology optimization

1. TO (Bendsøe & Kikuchi, 1988)

数学的に定式化し最適な構造形状を導き出す計算手法

- 設計領域内の材料分布を反復的に更新
- **荷重条件や境界条件**をもとに、**剛性・強度**などの構造特性を改善



材料の使用量を最小限に抑えながら効率的な構造を設計が可能に。

しかし、多くのTO問題は**非凸**であり、最小値への収束は保証されない



「**準最適解**」の取得が目標

2.1 Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP)

2. SIMP法

GenTOで採用している代表的なトポロジー最適化手法

設計領域におけるメッシュ点 $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ 、 $i \in \{1, \dots, N\}$ を定義
各メッシュ点において二値の密度関数 $\rho(x_i) \in \{0, 1\}$ を求める。

$\rho(x_i) = 0$ 材料がない空洞

$\rho(x_i) = 1$ 材料がある領域

微分可能にするため、材料密度 ρ は連続値の範囲 $[0, 1]$ に緩和

SIMPの目的は、**コンプライアンス (C)** を最小化すること

力を加えたときの変形のしやすさ

目的関数 制約つき最適化問題

$$\begin{aligned} \min \quad & C(\rho) = \mathbf{u}^T \mathbf{K}_\rho \mathbf{u} \\ \text{s.t.} \quad & V = \sum_{i=1}^N \rho_i v_i \leq V^* \quad \text{材料の体積制限} \\ & 0 \leq \rho_i \leq 1 \quad \forall i \in N \quad \text{密度の範囲制限} \end{aligned}$$

$\mathbf{u}$	変位ベクトル
$\mathbf{K}_\rho$	剛性マトリクス (材料の硬さを表す行列)
$\mathbf{u}^T \mathbf{K}_\rho \mathbf{u}$	全体の構造がどれだけ変形するかをエネルギーとして表現

2.1 Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP)

目的関数

制約つき最適化問題

$$\min C(\rho) = \mathbf{u}^T \mathbf{K}_\rho \mathbf{u}$$

$$\text{s.t. } V = \sum_{i=1}^N \rho_i v_i \leq V^*$$

材料の体積制限

$$0 \leq \rho_i \leq 1 \quad \forall i \in N$$

密度の範囲制限

$\mathbf{u}$

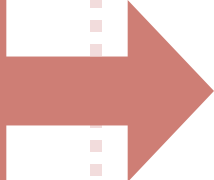
変位ベクトル

$\mathbf{K}_\rho$

剛性マトリクス
(材料の硬さを表す行列)

$\mathbf{u}^T \mathbf{K}_\rho \mathbf{u}$

全体の構造がどれだけ変形するかをエネルギーとして表現



密度 ρ を繰り返し最適化

有限要素法 (FEM) ソルバーが

- コンプライアンス (構造の柔らかさ) を計算
- 密度を更新するための勾配を与える。

しかし、が0~1の**中間値**に留まると、**中途半端な材料分布**に

ペナルティ付き剛性マトリクス

密度に指数 $p > 1$ をかけて中間値をペナルティ

$$\mathbf{K}_\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i^p \mathbf{K}_i$$

「0 (空洞) か1 (材料あり) に近い解」を選びやすくなる

2.1 Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP)

2. Annealing

Kirkpatrick et al. 1983

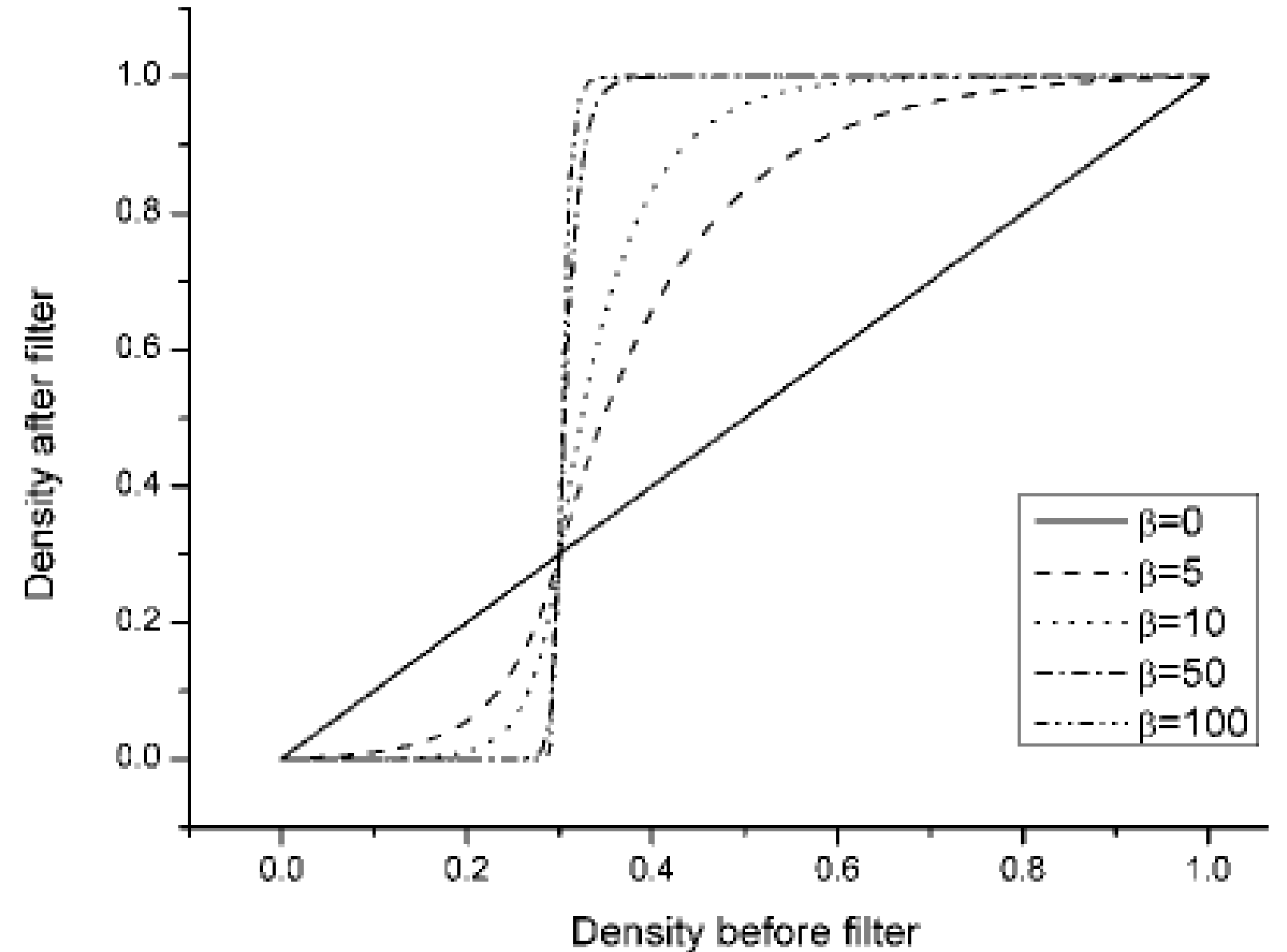
連続的な緩和（relaxation）を、もとの離散問題により近づけるため最適化の過程において関数の鋭さ（シャープさ）を徐々に調整

- ペナルティ指数 p を段階的に増やす
- 「**Heavisideフィルター**」（関数の急峻さを調整）を導入する

Heavisideフィルター 滑らかに0と1を切り替える関数

$$H(x, \beta) = 0.5 + \frac{\tanh(\beta(x - 0.5))}{2 \tanh(0.5\beta)}$$

パラメータ



Smoothed volume preserving Heaviside function

Xu et al. 2010

2.1 Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP)

3. Topology optimization with neural reparametrization.

従来のトポロジー最適化（TO）はメッシュ上で形状を扱う。



ニューラルパラメータ化

設計領域内の形状や材料の分布をニューラルネットワークで表現する手法。
メッシュに依存せず、連続的な形状表現が可能となる。

NTopo (Zehnder et al., 2021)

GenTO (本研究)

各問題ごとに1つの形状

1つの問題から複数の形状



単一条件下で多様な設計案
製造・美的要件に応じた**設計自由度の向上**

2.1 Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP)

4. Topology optimization with multiple solutions

従来のトポロジー最適化アルゴリズムでは通常、単一の解しか得られない。

Deflated Barrier (DB) 法 Papadopoulos et al. (2021)

TO問題に対して複数の局所最適解を計算可能にした最初の手法

- Deflation (デフレーション) : 既に見つけた解に再び収束しないようにするための手法
- Barrier Method (バリア法) : 制約条件を扱うための手法。
- Primal-Dual Active Set Solver : 制約付きの最適化問題を高速かつ安定的に解くソルバー。
- Depth-First Search Strategy : 一つの解を見つけた後、その解と異なる新たな局所解を順に探索。初期値に依存せずに多様な解を見つける仕組み。



トポロジー最適化における**設計の多様性**を大きく向上させる。

2.2 Shape generation with neural networks

1. Neural fields

従来の明示的 (explicit) な表現方法 (メッシュや点群など)

ニューラルフィールド

形状を暗黙的 (implicit) に表現するための強力な手法

暗黙的形状を表現するための代表的な方法

- **符号付き距離関数 (SDF, Signed Distance Function)**
(Park et al., 2019; Atzmon & Lipman, 2020)

各点から形状の境界までの距離を符号付きで表現

- **密度フィールド (density field)**
(Mescheder et al., 2019b)

各点に対して材料が存在する確率や密度を与える

本研究

密度フィールド (density field)

ニューラルネットワーク f_θ

$$f_\theta : \mathbb{R}^{d_x} \rightarrow (0, 1)$$

次元数

物体 (形状)

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^{d_x} \mid f_\theta(x) > \tau\}$$

閾値 τ より $f_\theta(x)$ が大きければ x は形状の中

境界

$$\partial\Omega := \{x \in \mathbb{R}^{d_x} \mid f_\theta(x) = \tau\}$$

2.2 Shape generation with neural networks

2. Conditional neural fields

通常のニューラル密度フィールド $f_{\theta}(\mathbf{x})$ は1つの形状しか表現できない

Conditional Neural Field

追加でモジュレーションコード $\mathbf{z}$ を入力

入力 $f_{\theta}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$

座標情報（空間の位置） 形状を指定するための「条件」

モジュレーションコード $\mathbf{z}$ の与え方

- | | | |
|-----------------------------|--|---|
| • 入力の連結（Concatenation） | | $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ を単純に並べて入力する。 |
| • ハイパーネットワーク（Hypernetworks） | | 別のネットワークでパラメータを生成し、それを本体ネットワークに使う。 |
| • アテンション（Attention） | | モジュレーションベクトルに「注目」しながら形状を生成する仕組み。 |

2.2 Shape generation with neural networks

3. Compression perspective

ニューラルネットワークを使うと、形状データを**圧縮して保存できる**

ボクセル表現	ニューラル密度表現
空間を細かなグリッドに分割し、各セルごとに物質の存在を記録する 高解像度になると メモリ使用量が爆発的に増大	座標に応じた密度をニューラルネットワークが出力する関数表現 ネットワークのパラメータのみを保存すればよいため、 メモリ消費量を大幅に削減 できる。

条件付きニューラルフィールド

$f_{\theta}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$

各形状の情報を個別に保存する必要がなく、
モジュレーションコード $\mathbf{z}$ により形状を柔軟に変化させる

さらに高い**圧縮率**が実現可能

2.2 Shape generation with neural networks

4. Diversity constraint

最適化において複数の解を見つけるため本研究では問題設定に**多様性制約** (diversity constraint) を加える。

GINNs (Berzins et al., 2024)において

多様性指標 各形状と最も近い他の形状との距離をもとに、**集合全体の多様性の大きさ**を測る指標。

$$\delta(\{\Omega_i\}) = \left(\sum_j \left(\min_{k \neq j} d(\Omega_j, \Omega_k) \right)^{1/2} \right)^2$$

非類似度関数 2つの形状の間のどれだけ異なるか（距離）を測る関数。

$$d(\Omega_1, \Omega_2) = \int_{\partial\Omega_2} f_1(x)^2 dx + \int_{\partial\Omega_1} f_2(x)^2 dx$$

SDF (Signed Distance Function) で表現された f_1, f_2 の場合、この関数はChamfer距離（2つの境界間の平均距離）と一致

本研究のように密度フィールド (density field) を用いる場合には、この仮定は**成立しない**。

→3.2節

3. Method

3.1 Generative Topology Optimization

1. Definitions.

対象領域

$\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{d_x}$ 形状 $\Omega \subset \mathcal{X}$ が存在する空間

モジュレーション空間

$\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^d$ 各ベクトル $z \in \mathcal{Z}$ がそれぞれ異なる形状 Ω_z を定義する。

形状の集合全体: $\Omega_{\mathcal{Z}} = \{\Omega_z \mid z \in \mathcal{Z}\}$

形状 (レベルセット)

$$\Omega_z = \{x \in \mathcal{X} \mid \rho_z(x) > \tau\}$$

本研究では $\tau = 0.5$ Jia et al. (2024)

密度

$$\rho_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) = f_{\theta}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$$

密度 $\rho_{\mathbf{z}}(\mathbf{x})$ はニューラルネットワーク f_{θ} によってモデル化

3.1 Generative Topology Optimization

2. GenTO

複数の形状の期待コンプライアンス（構造の柔らかさ）を最小化する**制約付き最適化問題**を解くことを目的

最適化問題

$$\min_{f_\theta} \mathbb{E}_{z \sim p(z)} [C(\rho_z)]$$

$$\text{s.t. } V_z = \int_{\mathcal{X}} \rho_z(x) dx \leq V^* \quad \text{体積制約}$$

$$0 \leq \rho_z(x) \leq 1 \quad \text{密度の範囲}$$

$$\delta^* \leq \delta(\Omega_z) \quad \text{多様性制約}$$

各形状について密度分布 $\rho_z(x)$ を計算

それを有限要素法（FEM）ソルバーに入力し、
コンプライアンス C とその勾配 ∇C を計算

自動微分によって効率よく勾配を求め、パラメータ θ を更新

複数制約を適応型ラグランジュ法（ALM）でバランスさせながら最適化

Heavisideフィルタの鋭さパラメータ β を段階的に増加

3.2 Diversity

1. differentiable chamfer差分

片側 Chamfer 差分

$$CD(\partial\Omega_1, \partial\Omega_2) = \frac{1}{|\partial\Omega_1|} \sum_{x \in \partial\Omega_1} \min_{\tilde{x} \in \partial\Omega_2} \|x - \tilde{x}\|_2$$

Berzins et al. (2023) Mehta et al. (2022)

Ω_1, Ω_2 の境界 $(\partial\Omega_1, \partial\Omega_2)$ 間の不一致度を定義

$x \tilde{x}$ 各境界点上からサンプリングされた値

Chamfer距離を損失関数として使う場合、学習の時に勾配が必要。しかし、

境界点 x は $f_\theta(x) = \tau$ を満たすような点

x は θ に暗黙的に依存

そのままだと $\frac{\partial CD}{\partial \theta}$ を計算できない

連鎖律とレベルセット方程式を使って導出

Chen et al., 2010; Berzins et al., 2023; Mehta et al., 2022

$$\frac{\partial CD}{\partial \theta} = \frac{\partial CD}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial CD}{\partial x} \cdot \frac{\nabla_x f_\theta}{|\nabla_x f_\theta|^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$y = \rho$: 本研究で用いる密度フィールド

2. Finding surface points on density fields

SDF で成り立つ **エイコナル方程式** $|\nabla f(x)| = 1$ が
密度場 $g(x)$ では**成り立たない**

勾配 $\nabla g(x)$ は局所最小にハマるリスクが高い

高密度なサンプリング、2分探索に基づく堅牢なアルゴリズム

3.3 Formalizing geometric constraints

トポロジー最適化では体積や剛性を最小化するだけでなく、
「このエリアは必ず材料がある」などの **幾何学的な制約** を加えたいことがある。

従来のTO

- 固体領域 ($\rho = 1$) を直接メッシュに割り当て。
- しかし、境界を細かく表現するには高いメッシュ分解能が必要。
- メッシュ分解能が上がると、FEM（有限要素法）ソルバの**計算コストが大幅に増大**。

現実的な**大規模最適化**には適さない。

GINNs (Geometric Implicit Neural Networks) **高い表現力、細かい制御が可能**
連続場 (continuous field) を使って、形状に対する微妙な制約をかける方法

改良
密度フィールド (density field) に対しても使えるように

GPUで並列計算 → 高速に実行可能

4. Experiments

4. GenTO

GenTO実験

WIRE アーキテクチャ (Saragadam et al., 2023)

- 活性化関数として「ウェーブレット (wavelet)」
 - 高周波の細かい構造を表現しやすい
 - sin関数より**局所的** → インターフェースや境界のような細かい部分をうまく表現できる

実験設定、提案手法

GenTO (single)

単一形状を最適化 $\delta = 0$ なので多様性制約なし

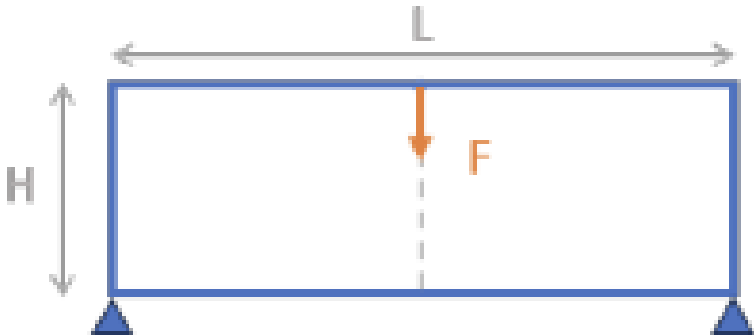
GenTO (equidistant)

3×3 等間隔グリッドから選んだ9形状を同時に最適化。

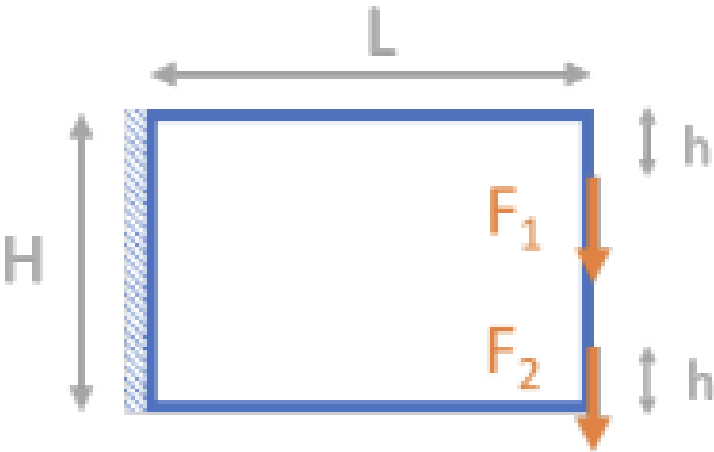
GenTO (uniform)

$[0, 1]^2$ 空間からランダムにサンプリングして9または25形状を最適化。

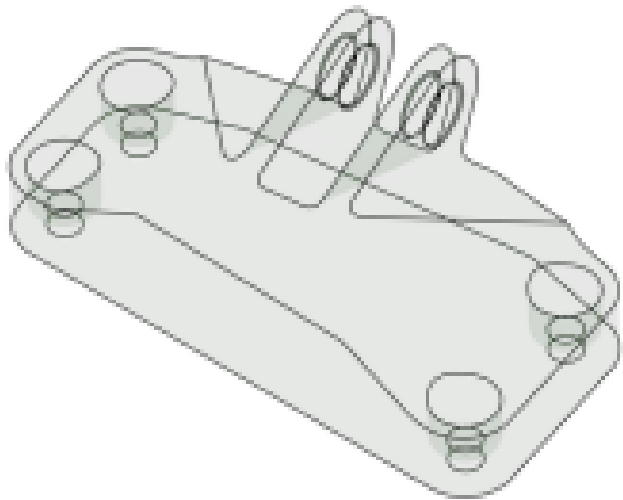
4.1 Problem definitions



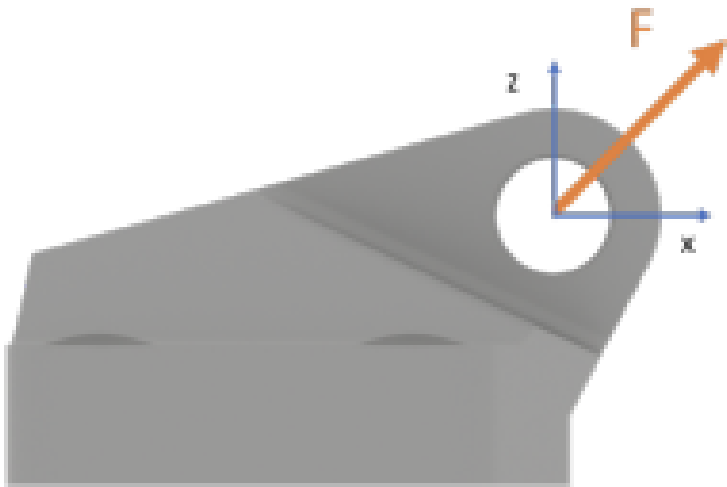
(a)



(b)



(c)



(d)

項目	(a) MBB Beam(2D)	(b) Cantilever(2D)	(c) (d) Jet Bracket(3D)
特徴	対称ビーム構造	片持ち梁	空間内に納める形状に斜め荷重
固定条件	左右下端	左端全体	4面固定
荷重条件	上部中央から下向き	右端上下から2力	x方向・z方向に引っ張る斜めの力

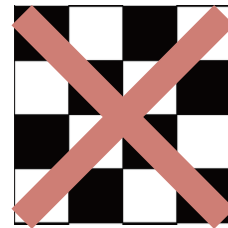
4.2 Baselines

1. T0 for a single solution

FeniTop Jia et al., 2024

- **SIMP法**の標準実装

- **スムージングフィルター**で
チェッカーボードパターン防止



密度場の急激な変化をなだらかにする処理。
不自然なパターンを除去できる。

- **コントラストフィルター**も使用

密度値を0（空洞）か1（固体）に
強く押し上げる・押し下げる処理。

2. T0 for multiple solutions.

deflated barrier method (DB) Papadopoulos et al., 2021

- T0に対して複数解を見つけるための最先端手法
- **逐次的アルゴリズム**であり、
複数のソルバステップを**並列実行できない**。
GenTO
- カンチレバー梁、MBBビームに対してのみ実装
- ジェットエンジンブラケット問題には実装しない
 - DBの数学的枠組みが複雑であること
 - 性能が遅いこと
 - ハイパーパラメータへの感度が高い
- 訓練中にメッシュを細かく再分割するため、
最適化中の各ソルバステップでランタイムが増加

4.3 Metrics

1. Quality

変形しにくい（剛性が高い）構造を作る

剛性の高さ = コンプライアンス（柔らかさ）の低さ

期待コンプライアンス 平均的な硬さ

$$\mathbb{E}[C] := \mathbb{E}_{z \sim p(\mathcal{Z})}[C(\Omega_z)]$$

最小コンプライアンス 一番硬い形状の柔らかさ

$$\min(C) := \min_{z \in \mathcal{Z}} C(\Omega_z)$$

最大コンプライアンス 一番柔らかい形状の柔らかさ

$$\max(C) := \max_{z \in \mathcal{Z}} C(\Omega_z)$$

期待体積 体積制約の確認

$$\mathbb{E}[V] := \mathbb{E}_{z \sim p(\mathcal{Z})}[V(\Omega_z)]$$

数値計算の工夫

- FenicsXという強力な数値FEMソルバを使用
- 最終評価には高解像度メッシュを使う



- 計算誤差（離散化誤差）を最小化
- メッシュに依存したアーティファクト（不自然な数値ノイズ）を防ぐ

4.3 Metrics

2. Diversity

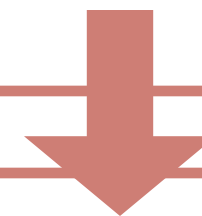
形状集合 Ω_Z の多様性を定量的に測定したい

Hill数 Leinster (2021) 多様性をはかる理論

$$D_q(S) = \left(\sum_i p_i^q \right)^{\frac{1}{1-q}}$$

p_i 各要素の存在確率
 q パラメータ

- 多様性を測るときに自然だと思われる「6つの性質」（例えば要素数が増えたら多様性も増えるべき、など）を全部満たせるのは**Hill数のみ**
- $q = 2$ の場合、2つ要素をランダムに選んだときの期待非類似度と一致



期待Wasserstein-1距離 Leinster (2021)

$$\mathbb{E}[W_1] := \mathbb{E}_{z_i, z_j \sim p(Z)} [W_1(\Omega_{z_i}, \Omega_{z_j})]$$

計算コストを抑えつつ非類似度（形状の違い）を定量化

4.3 Metrics

1. Computational cost

ソルバーステップ数

- 大規模メッシュ（例：1万要素以上）では、これが計算時間の大きな要因に

ネットワークのイテレーション数（=最適化ステップ数）

- GenTOの並列化による高速化効果も含めて比較できます。

実際の経過時間（Wall Clock Time）

- 現実的な運用のしやすさ（実用性）を評価するために使います。

5. Results

5.1 Main results

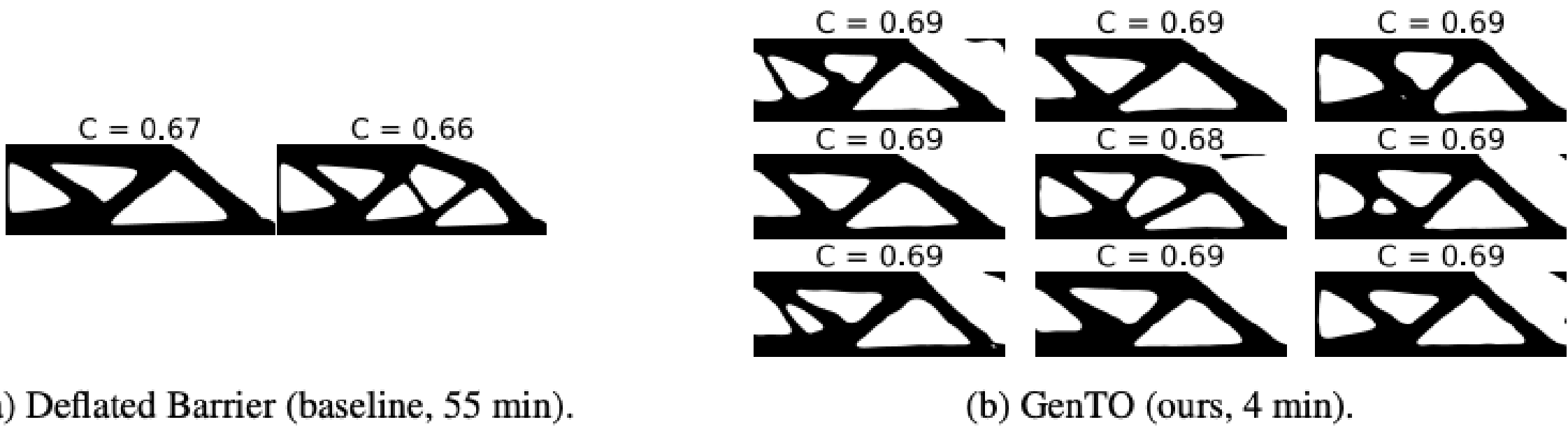
1. 評価指標

項目	N	E(C)	$\min(c)/\max(c)$	E(V)	E(W1)	Time	Its	Steps	FEM resolution
説明	得られた解の 個数	コンプライアンス の平均（柔らかさの指標）	コンプライアンスの最小値・最大値	材料体積 の平均（設計領域に対する割合%）	形状間のWasserstein-1距離の平均（ 多様性の指標 ）	計算にかかった 実時間 （分）	ネットワークのイテレーション数（何回更新したか）	FEMソルバーを呼び出した回数	使用したメッシュの 解像度 （サイズ）
目標	多い ほどよい（多様性大）	小さい ほどよい（硬い方がよい）	小さい方が望ましい	適切に収まっているか	大きい ほどよい（形状がバラバラ）	小さい ほどよい（高速）	少ない ほどよい（効率的）	少ない ほどよい（効率的）	高解像度 なら精度が高い（ただし計算コストも増）

5.1 Main results

2. GenTO is more diverse

- GenTOは、従来手法DB (Deflated Barrier) よりも多様な形状を生成可能



- GenTOで得られた解は、単なる形の違いだけでなく、穴の数や構造自体が異なる

トポロジーが違う

Problem	Method	N	E(C)	min(C)	max(C)	E(V)	E(W ₁)	Time	Its.	Steps	FEM resolution
MBB						53.5					
	DB	2	0.67	0.66	0.67	53.4	0.0136	55.5		3190	50x150 → 27174
	Fenitop	1	0.68			53.4		2	400	400	180x60
	GenTO (single)	1	0.68			54.0		1.5	400	400	180x60
	GenTO (equidistant)	9	0.69	0.68	0.69	53.5	0.0214	4	400	3600	180x60
	GenTO (uniform)	$\mathcal{U}([0, 1]^2)$	0.70	0.69	0.72	53.2	0.0157	13	650	16250	
Cantilever						$\times 10^{-2}$					
	DB	2	0.58	0.57	0.58	49.9	0.0101	123		4922	25x37 → 52024
	Fenitop	1	0.59			49.9		4	400	400	150x100
	GenTO (single)	1	0.58			49.9		2.5	400	400	150x100
	GenTO (equidistant)	9	0.61	0.59	0.62	50.4	0.0157	5	400	3600	150x100
	GenTO (uniform)	$\mathcal{U}([0, 1]^2)$	0.67	0.65	0.73	49.6	0.0065	28.5	1000	25000	150x100
Bracket						$\times 10^{-3}$					
	Fenitop	1	0.99			7.16		187	300	400	104x172x60
	GenTO (single)	1	0.90			7.42		19.5	400	400	26x43x15
	GenTO (equidistant)	9	0.97	0.87	1.04	7.07	0.0065	60	1000	9000	26x43x15
	GenTO (uniform)	$\mathcal{U}([0, 0.25]^2)$	1.63	1.35	1.85	7.04	0.0015	92	1400	12600	26x43x15

5.1 Main results

2. Equidistant（等間隔サンプリング）とUniform（ランダムサンプリング）

Equidistant sampling（等間隔サンプリング）は**Uniform sampling**（ランダムサンプリング）よりもあらゆる指標で優れた性能を示した。

等間隔サンプリング

- 等間隔にモジュレーションを与えることで、離れた重要な形状モードを効率よくカバー
- 個別の重要な解をそれぞれ独立に学習

ランダムサンプリング

- ランダムにサンプルするため、解の連続的な変化を表現する必要がある。
- 学習が難しくなり、多くのイテレーションとソルバーステップを要する。

Problem	Method	N	E(C)	min(C)	max(C)	E(V)	E(W ₁)	Time	Its.	Steps	FEM resolution
MBB						53.5					
	DB	2	0.67	0.66	0.67	53.49	0.0136	55.5		3190	50x150 → 27174
	FeniTop	1	0.68			53.49		2	400	400	180x60
	GenTO (single)	1	0.68			54.09		1.5	400	400	180x60
	GenTO (equidistant)	9	0.69	0.68	0.69	53.54	0.0214	4	400	3600	180x60
	GenTO (uniform)	$\mathcal{U}([0, 1]^2)$	0.70	0.69	0.72	53.28	0.0157	13	650	16250	
Cantilever				$\times 10^{-2}$		50.00					
	DB	2	0.58	0.57	0.58	49.98	0.0101	123		4922	25x37 → 52024
	FeniTop	1	0.59			49.91		4	400	400	150x100
	GenTO (single)	1	0.58			49.94		2.5	400	400	150x100
	GenTO (equidistant)	9	0.61	0.59	0.62	50.42	0.0157	5	400	3600	150x100
	GenTO (uniform)	$\mathcal{U}([0, 1]^2)$	0.67	0.65	0.73	49.60	0.0065	28.5	1000	25000	150x100
Bracket				$\times 10^{-3}$		7.00					
	FeniTop	1	0.99			7.16		187	300	400	104x172x60
	GenTO (single)	1	0.90			7.42		19.5	400	400	26x43x15
	GenTO (equidistant)	9	0.97	0.87	1.04	7.07	0.0065	60	1000	9000	26x43x15
	GenTO (uniform)	$\mathcal{U}([0, 0.25]^2)$	1.63	1.35	1.85	7.04	0.0015	92	1400	12600	26x43x15

5.1 Main results

2. GenTO is faster

GenTOは、DBに比べ、実行時間が10倍以上**速い**ことが示された

GenTO

- 並列計算が可能。
- 複数の設計を同時に最適化可能

DB

- 解を1個ずつ順番に求める必要があり、並列化できない
- 最適化中にメッシュ細分化を行うため、メッシュが細くなり、1回のソルバーステップの計算時間も増加

GenTO（等間隔版）とDBは、トータルのソルバーステップ数はほぼ同程度

Problem	Method	N	E(C)	min(C)	max(C)	E(V)	E(W ₁)	Time	Its.	Steps	FEM resolution
MBB						53.5					
	DB	2	0.67	0.66	0.67	53.49	0.0136	55.5		3190	50x150 → 27174
	FeniTop	1	0.68			53.49		2	400	400	180x60
	GenTO (single)	1	0.68			54.09		1.5	400	400	180x60
	GenTO (equidistant)	9	0.69	0.68	0.69	53.54	0.0214	4	400	3600	180x60
	GenTO (uniform)	$\mathcal{U}([0, 1]^2)$	0.70	0.69	0.72	53.28	0.0157	13	650	16250	
Cantilever				$\times 10^{-2}$		50.00					
	DB	2	0.58	0.57	0.58	49.98	0.0101	123		4922	25x37 → 52024
	FeniTop	1	0.59			49.91		4	400	400	150x100
	GenTO (single)	1	0.58			49.94		2.5	400	400	150x100
	GenTO (equidistant)	9	0.61	0.59	0.62	50.42	0.0157	5	400	3600	150x100
	GenTO (uniform)	$\mathcal{U}([0, 1]^2)$	0.67	0.65	0.73	49.60	0.0065	28.5	1000	25000	150x100
Bracket				$\times 10^{-3}$		7.00					
	FeniTop	1	0.99			7.16		187	300	400	104x172x60
	GenTO (single)	1	0.90			7.42		19.5	400	400	26x43x15
	GenTO (equidistant)	9	0.97	0.87	1.04	7.07	0.0065	60	1000	9000	26x43x15
	GenTO (uniform)	$\mathcal{U}([0, 0.25]^2)$	1.63	1.35	1.85	7.04	0.0015	92	1400	12600	26x43x15

5.1 Main results

2.単一解（Single Solutions）と複数解（Multiple Solutions）

コンプライアンス、計算速度、ソルバーステップ数のすべての指標において、**単一解の最適化が、複数解の最適化を上回る**結果となった。

- 複数解最適化では、多様性制約（diversity constraint）も同時に考慮する必要がある。

GenTO（single）の性能比較

- GenTO（single）は、**FeniTop**と同等の性能を達成した。
- DBにはやや劣る結果となった。

DBは、最適化中にメッシュ細分化を行う。

- より高精度な構造解が得られる。
- コンプライアンス性能が高くなる

Problem	Method	N	E(C)	min(C)	max(C)	E(V)	E(W ₁)	Time	Its.	Steps	FEM resolution
MBB						53.5					
	DB	2	0.67	0.66	0.67	53.4	0.0136	55.5		3190	50x150 → 27174
	FeniTop	1	0.68			53.4		2	400	400	180x60
	GenTO (single)	1	0.68			54.0		1.5	400	400	180x60
	GenTO (equidistant)	9	0.69	0.68	0.69	53.5	0.0214	4	400	3600	180x60
	GenTO (uniform)	$\mathcal{U}([0, 1]^2)$	0.70	0.69	0.72	53.2	0.0157	13	650	16250	
Cantilever				$\times 10^{-2}$		50.0					
	DB	2	0.58	0.57	0.58	49.9	0.0101	123		4922	25x37 → 52024
	FeniTop	1	0.59			49.9		4	400	400	150x100
	GenTO (single)	1	0.58			49.9		2.5	400	400	150x100
	GenTO (equidistant)	9	0.61	0.59	0.62	50.4	0.0157	5	400	3600	150x100
	GenTO (uniform)	$\mathcal{U}([0, 1]^2)$	0.67	0.65	0.73	49.6	0.0065	28.5	1000	25000	150x100
Bracket				$\times 10^{-3}$		7.00					
	FeniTop	1	0.99			7.16		187	300	400	104x172x60
	GenTO (single)	1	0.90			7.42		19.5	400	400	26x43x15
	GenTO (equidistant)	9	0.97	0.87	1.04	7.07	0.0065	60	1000	9000	26x43x15
	GenTO (uniform)	$\mathcal{U}([0, 0.25]^2)$	1.63	1.35	1.85	7.04	0.0015	92	1400	12600	26x43x15

5.2 Ablations

Ablations

モデルの構成要素を意図的に取り除いたり変えたりして**それぞれが性能にどう影響しているかを調べる手法**

1. Sensitivity to penalty p

剛性行列

$$\mathbf{K}_\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i^p \mathbf{K}_i$$

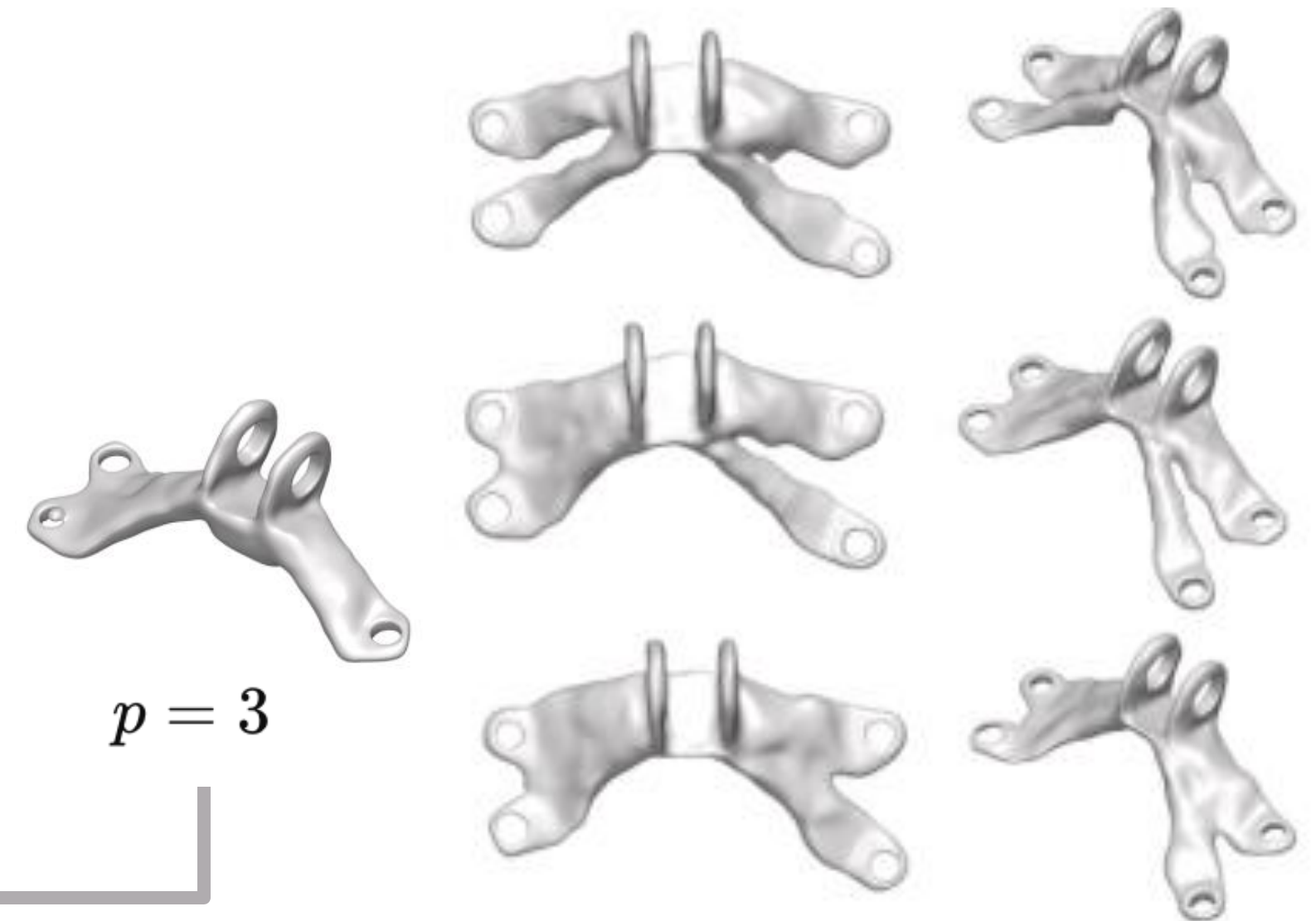
メッシュ要素の剛性 K_i に関する密度 ρ_i の勾配

$$\frac{\partial K_i(\rho_i)}{\partial \rho_i} = p \rho_i^{p-1} K_i$$



p が大きいと損失地形が鋭くなり、局所最小に陥りやすい。

- 2Dではあまり影響なし
- 3Dでは $p = 3$ では望ましくない局所解に収束



5.1 Ablations

Ablations

モデルの構成要素を意図的に取り除いたり変えたりして**それぞれが性能にどう影響しているかを調べる手法**

2. Annealing is necessary for good convergence

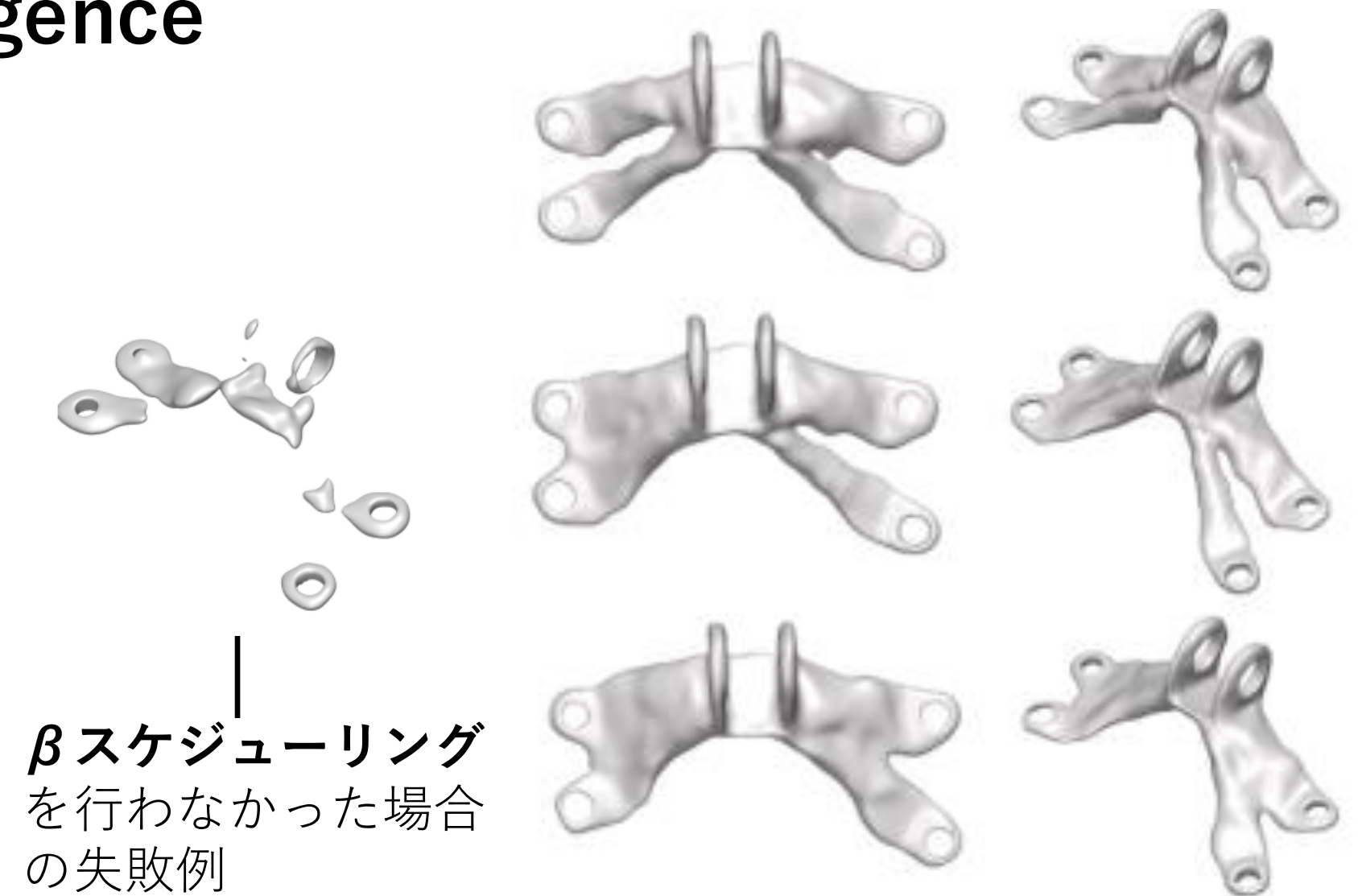
Annealing

学習中にパラメータ（ここではHeaviside関数の鋭さパラメータ β ）を徐々に大きくしていく手法

Heaviside関数

$$H(x, \beta) = 0.5 + \frac{\tanh(\beta(x - 0.5))}{2 \tanh(0.5\beta)}$$

GenTOが良好な収束を達成するためには**アニーリングが必要**である



5.1 Ablations

2. Different frequency bias for x and z

周波性バイアス

モデルがどれくらい細かい構造（高周波成分）を表現できるか

- x （座標） → 形状そのもの。高周波バイアスも重要（細かいディテールを表現）
- z （モジュレーション） → どんな種類の形を作るかの方向付け。適度な低周波バイアスが望ましい。

x と z で違う周波性バイアスの必要性

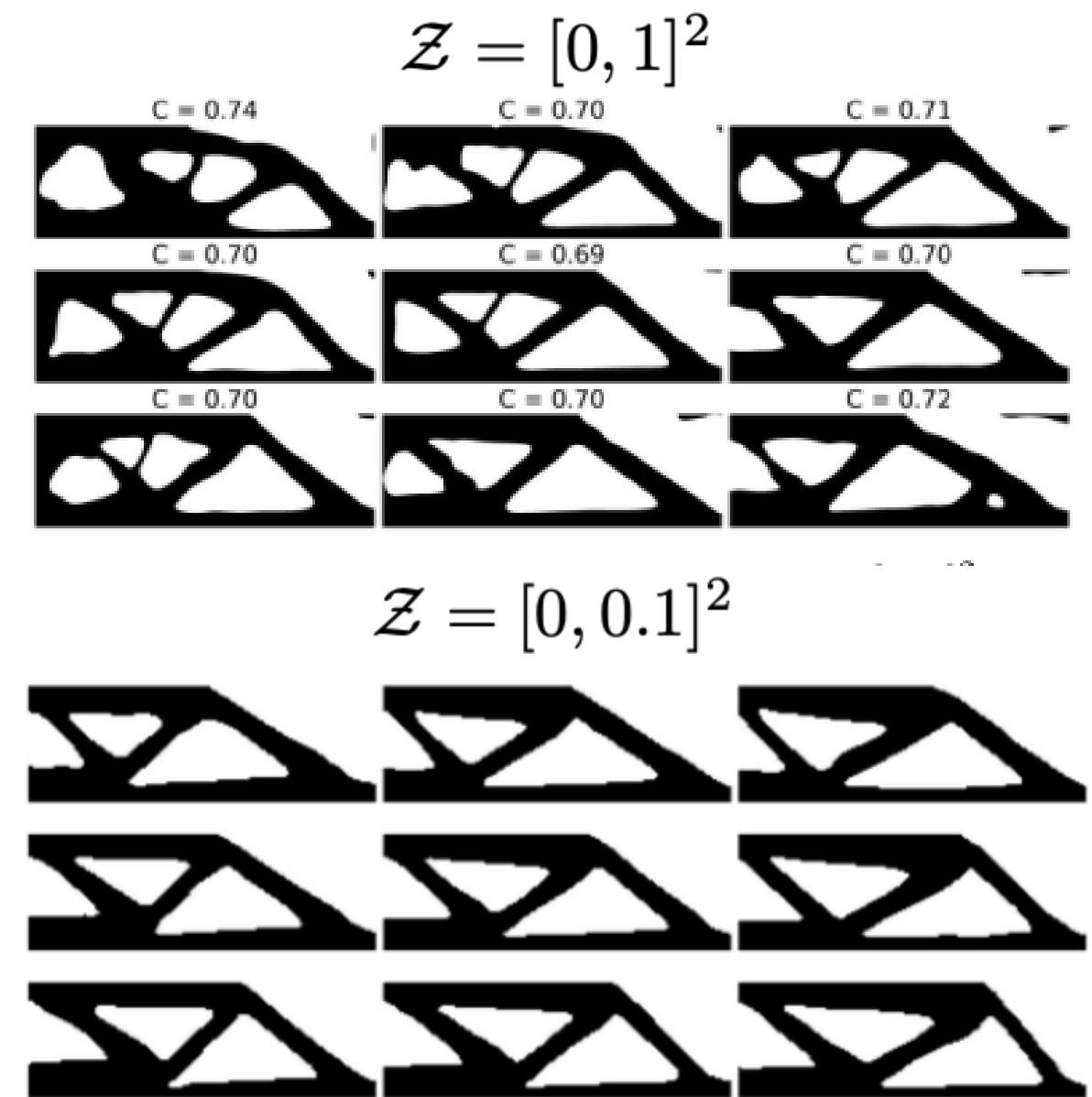
モジュレーション空間 $\mathcal{Z}$ の範囲でコントロール

適切に狭めると学習が安定し、バランスの取れた多様性

多様性指標

21.4×10^{-3}

11.8×10^{-3}



6. Conclusion

6.1 Conclusions

研究内容

- Generative Topology Optimization (GenTO) を提案
- ニューラルネットワークで形状をパラメータ化し、多様な解を**明示的に**生成
- 複数の準最適解を探索可能

目的・意義

- 産業応用（製造制約・美的要件）に応じた**形状の選択**を可能にする

実験結果（成果）

- 機械要件（剛性など）を満たす
- 高い拡張性を確認

主な貢献

- **データ不要**かつ**solver-in-the-loop型のニューラルネットワーク**の訓練手法を初めて提案
- **単一解、計算コスト**などの現在のエンジニアリング・デザイン分野における制約を克服

6.1 Limitations and Future Work

1. Limitations

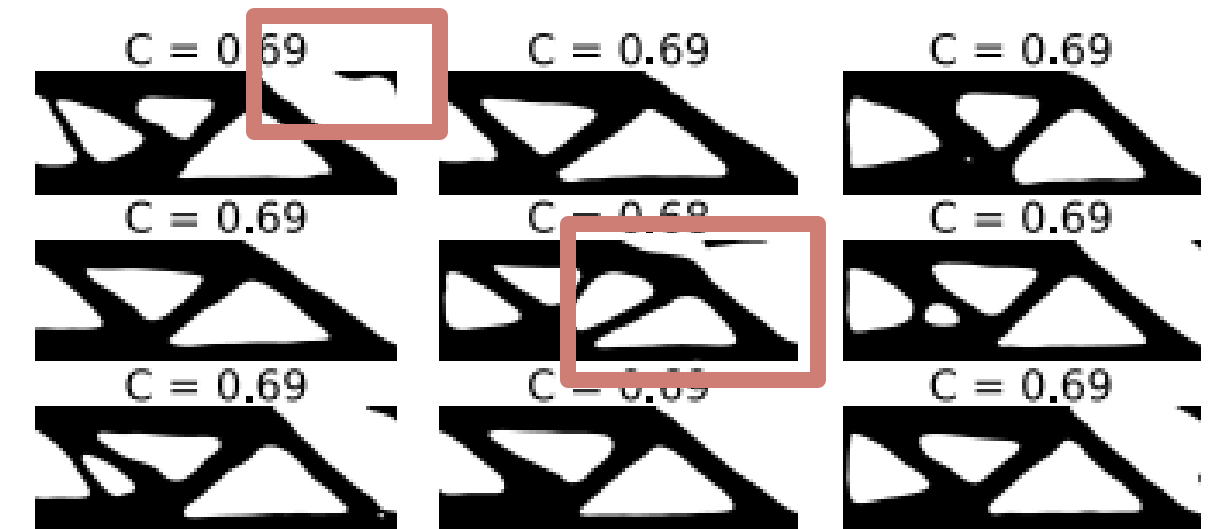
- 小さな切り離された部品が現れることがある
- 形状表面に波打ちが見られることがある
- 大量の計算リソースを必要とする。実用化を目指すには、より少ないサンプルで高品質な設計を得る工夫が求められる。

2. Future work

- 後処理ステップ(Subedi et al., 2020)を適用してフローターやうねりを修正・除去
- 現在の多様性損失に使われている非類似度関数以外にも、別の非類似度指標を導入する
- 現在は一次最適化（勾配情報のみ）だが、二階情報（ヘッセ行列やその近似）を利用する
- 最適化初期に、複数ソルバ出力の相互情報量を計算。情報的に異なるサンプルを優先して使い、サンプル効率を高める。
- GenTOで粗い設計を生成し、その後、古典的トポロジー最適化で洗練・仕上げる。



(a) Deflated Barrier (baseline, 55 min).



(b) GenTO (ours, 4 min).

所感

- デザイン的な観点から設計は、課題が残ると感じた
- 建築的な設計への適応も面白そうだが、細かい制約を入れるのは難しそう
- 多様性（複数解）を目的としているのが面白く、各解の比較も興味深い。
- 以前より論文読むスピードが早くなった気がする。